Des vidéos pour mieux comprendre les mathématiques.

Les collègues qui ont participé aux journées nationales de Rennes de l'APMEP se souviennent sans doute du « Tunnel de Samos », le film qu'une équipe animée par Eliane Cousquer venait de faire traduire et adapter à partir du programme «Project Mathematics» de Tom Apostol, qui connaît depuis 1980 un grand retentissement[1] dans le monde anglo-saxon.

Ce programme comporte une série de vidéos pour l'enseignement secondaire contenant des *animations informatiques*, des extraits de films et des images de documents originaux commentés sur fond musical.. On estimait qu'en 1998, aux Etats Unis, ces vidéos étaient utilisées par plus de dix millions d'élèves et vendues à 140 000 exemplaires[2]. Elles ont été diffusées par une trentaine de chaînes de télévisions et ont remporté une douzaine de prix du logiciel pédagogique aux Etats Unis.

Au prix d'un travail considérable et de nombreuses difficultés administratives, 9 vidéos ont été adaptées en français par une équipe lilloise[3] sous la responsabilité scientifique d'Eliane Cousquer[4] et artistique de Christian Cousquer.

Voici les titres par ordre de création[5]: *Le théorème de Pythagore* ; *L'histoire de* p ; *Similitude, Polynômes* ; *Sinus et cosinus ; Sinus et cosinus II ; Sinus et cosinus III ; Le tunnel de Samos ; Histoire des mathématiques.*

Chacune des neuf vidéos dure environ 30 minutes. Elles sont en vente au CNDP (http://www.cndp.fr) et dans les CRDP sous forme de *3 bandes vidéos (14.48 euros l'unité) regroupant chacune 3 films.*

Visualisation et effets sonores en mathématiques.

Dans l'enseignement des mathématiques, chaque époque apporte de nouveaux instruments, Par exemple, le travail sur l'intuition et la conjecture en mathématiques sont aujourd'hui grandement facilitées grâce à une panoplie de moyens allant des maquettes, des papiers pliés aux outils multimédia. Les sens (toucher, voir, entendre) sont ainsi réhabilités dans l'enseignement des mathématiques.

La visualisation – la présentation des idées, des principes et des problèmes par des images – joue un grand rôle pour enseigner et apprendre des mathématiques. Les images ont un impact souvent supérieur à celui des discours. On oublie plus facilement ce qu'on a lu ou entendu qu'une image qui fait appel à la sensibilité et à l'émotion. Il peut même arriver que «voir, c'est comprendre » ! Ces dernières années, les possibilités de visualisations se sont considérablement accrues avec les films et les animations informatiques.
Tout un courant de recherches travaille au niveau international sur la visualisation en mathématiques ; il allie les recherches fondamentales sur les algorithmes et les méthodes, en mathématiques et en informatique avec des recherches didactiques sur l'intégration de ces techniques dans l'enseignement. Ce courant de recherches organise tous les deux ans un colloque sponsorisé et publié par Springer Verlag. En novembre 2000, au colloque de Lisbonne, Tom Apostol a présenté ses vidéos très connues dans le monde anglo-saxon.

---

[1] Il a fallu 23 ans pour que des documents de cette qualité franchissent, non sans mal, les frontières linguistiques et culturelles. On est loin, dans les faits, du « village planétaire » cher à Mac Luhan !
[2] sans compter les copies faites librement par les enseignants pour leurs propres besoins.
[3] du Centre de Publication audio visuel (USTL) et du Lamia (Laboratoire Appliqué Multimédia, Informatique et Apprentissage) à l'IUFM.
[4] UFR Maths, U.S.T.L.
[5] Ont déjà parus : les programme 1 *(Pythagore, similitude et tunnel de Samos*, ***CNDP 755 B0408***) et 3 (sinus cosinus 1, 2, 3, ***CNDP 755 B0458***). Le programme 2 (Histoire de Pi, histoire des maths, polynômes) paraîtra en décembre 2003 au CNDP.

Objectifs et usages possibles de ces vidéos en classe.

L'objectif premier de ces vidéos est de montrer aux étudiants qu'apprendre les mathématiques peut être passionnant et gratifiant intellectuellement. Elles fournissent des ressources utilisables *en accompagnement* d'une séance en classe ou d'un manuel scolaire, avec une grande quantité d'informations en un temps relativement bref. La façon dont la vidéo est utilisée en classe dépend de l'aisance de l'élève, de ses connaissances antérieures et du degré d'implication de l'enseignant. Les élèves ne peuvent apprendre des mathématiques simplement en regardant la télévision, pas plus qu'en écoutant seulement en classe ou en lisant un manuel. L'interaction avec l'enseignant et le travail personnel sont essentiels pour apprendre. Les bandes vidéo sont destinées à stimuler la discussion et à encourager des échanges entre élèves et enseignants.

Ces vidéos présentent des notions mathématiques qui relèvent du programmes des classes de collège et de lycée et peuvent servir de support pour des activités interdisciplinaires avec des enseignants d'histoire ou de français, car elles allient une forte composante historique et culturelle à un contenu mathématique dense.

L'idée fondamentale de Tom Apostol, chercheur en mathématiques et auteur de livres universitaires renommés est que, loin de se plaindre de la concurrence de la télévision, les enseignants devraient utiliser ses techniques au service de leur discipline (en évitant de s'en contenter…) pour intéresser les élèves et développer leur culture et leur intelligence des notions mathématiques. Par dessus tout, leur faire découvrir que les mathématiques sont une aventure humaine qui a traversé les siècles et les civilisations.

La version française : caractéristiques et contenus.

Les neuf vidéos sont regroupées en trois programmes de trois vidéos. Le premier programme a pour thème dominant la *similitude*, le *théorème de Pythagore* et leurs applications (*Tunnel de Samos*). Le deuxième regroupe trois vidéos de *trigonométrie*. La dernière bande est centrée sur *l'Histoire des mathématiques*, *l'Histoire de p* et sur *les Polynômes*.

Un travail important a été fait sur la conception de la bande sonore en français par Christian Cousquer, acteur de théâtre. La traduction a été d'abord faite par un mathématicien puis adaptée par cet acteur : autant que possible, la présentation des notions utilise des termes de la vie de tous les jours[6], dans un objectif de popularisation des mathématiques à l'aide d'images mentales familières et de bruitages. L'attention de l'utilisateur est attirée par les effets visuels et sonores, suivant les techniques employées au cinéma ou au théâtre.

Les auteurs de la version française ont lancé une association « MédiaMaths » pour créer des documents d'accompagnement, animer des expérimentations en classe et les faire circuler en réseau à l'aide des outils de communication. (http://www.mediamaths.asso.fr.). Ce travail, essentiel à une bonne intégration de ces nouveaux outils dans l'enseignement des mathématiques, vous est ouvert[7].

Les bandes vidéos doivent en effet s'accompagner d'un travail « papier-crayon » sur une séquence choisie. Des documents pédagogiques et historiques d'accompagnement sous forme de fiches à adapter pour chaque classe vont être créés .

---

[6] Ainsi on utilise des mots parfois impropres mais familiers comme surface là où il faudra parler d'aire, de dilatation de figures au sens du ballon qui se dilate, de réflexion (comme dans un miroir) là où il faudrait parler de symétrie… On met aussi une partie « avant toute chose » au lieu de mettre « pré-requis ». Le même choix a été fait par Tom Apostol en anglais.

[7] Il suffit d'écrire à eliane.cousquer@wanadoo.fr

Une version DVD (à venir) permettra l'accès plus facile aux différentes séquences pour le travail en classe. Une version multilingue à destinations des classes européennes sera également créée.

Une remarque pratique très importante : ***une fois achetées par les établissements, les bandes sont librement reproductibles.*** Le texte écrit par le CNDP sur chaque vidéo précise en effet qu'elle est librement copiable pour les besoins de l'enseignement.
Ces films devraient figurer dans les CDI de tous les établissements !

Voici un résumé succinct de chaque film.

Le théorème de Pythagore : Cette bande sensibilise les élèves à l'utilité du théorème de Pythagore au moyen de situations concrètes. Les deux points de vue, algébrique et géométrique, sont illustrés. Des démonstrations du théorème au cours de l'histoire et dans différentes civilisations sont présentées avec de multiples animations (puzzles en Chine ou en Inde ; démonstrations fondées sur la similitude ou la méthode des aires). La vidéo présente une généralisation du théorème de Pythagore à des figures semblables construites sur les côtés du triangle rectangle[8] et montre son équivalence[9] avec le théorème de Pythagore (associé à la propriété que dans une similitude de rapport r les aires sont multipliées par r^2).

Similitude : La similitude est une transformation qui conserve la forme des objets (elle en modifie généralement la taille). Elle est fondamentale pour les maquettes, les cartes et les modèles réduits. On étudie son effet sur les triangles, les polygones, les aires et les volumes.

Le tunnel de Samos : Au sixième siècle avant Jésus Christ, un tunnel de 1036 mètres fut creusé à la main dans une montagne sur l'île grecque de Samos. Ce tunnel, une des réalisations techniques majeures de l'antiquité fut creusé par deux équipes travaillant simultanément des deux côtés de la montagne. Cela pose une énigme de taille : *« Quelle méthode mathématique fut employée pour trouver la direction correcte pour le creusement ?»* Plusieurs méthodes sont décrites dans la vidéo, la première proposée par Héron d'Alexandrie cinq siècles après la fin du percement du tunnel, la deuxième par des historiens des sciences vers 1950. L'équipe du projet *Mathematics* a filmé les lieux en 1993 et elle propose une combinaison des deux explications.

Sinus et Cosinus 1 s'ouvre sur des exemples de mouvements circulaires dans la vie réelle et introduit le sinus en relation avec un point sur un cercle unité. On représente les sinusoï des et leurs symétries ainsi que la courbe du cosinus. A propos du son, la fréquence et l'amplitude sont illustrées avec les tons produits par différents instruments de musique d'un orchestre. La nature répétitive ou périodique de la courbe du sinus est soulignée et d'autres ondes périodiques sont montrées. La découverte de Fourier est illustrée et un peu d'arrière plan historique est donné : une onde périodique est une combinaison d'ondes « sinus et cosinus », avec des fréquences et des amplitudes appropriées.

Sinus et cosinus 2 porte sur la trigonométrie et son utilisation pour déterminer des distances impossibles ou difficiles à mesurer directement. Les deux outils pour résoudre de tels problèmes sont la loi des cosinus et la loi des sinus[10] dont on développe l'application en topographie avec la cartographie de l'Inde. Le programme décrit comment elle a été faite et comment a été déterminée la hauteur du Mont Everest. Il retrace une histoire des instruments topographiques, du dioptre aux satellites orbitaux des temps modernes.

---

[8] La proposition 31 du livre 6 des Eléments d'Euclide affirme que si les carrés sont remplacés par des rectangles semblables ou trois autres formes semblables entre elles**,** l'aire des deux plus petites s'ajoutent pour égaler l'aire de la plus grande.

[9] Cette équivalence a été discutée de façon approfondie entre Eliane Cousquer et Jean-Pierre Friedelmeyer, qui a bien voulu relire cet article. Je tiens leur échange à la disposition des lecteurs (g.kuntz@libertysurf.fr).

[10] la loi des cosinus permet de calculer un coté d'un triangle en fonction des deux autres cotés et du cosinus de l'angle opposé, et la loi des sinus dit que le rapport d'un coté au sinus de l'angle opposé est une constante égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle.

Sinus et cosinus 3 relie les sinus et cosinus d'un angle avec les longueurs de cordes d'un cercle et fournit des démonstrations des formules d'addition pour le sinus et le cosinus d'une somme de deux angles. L'une est basée sur un théorème de Ptolémée sur des quadrilatères inscrits dans un cercle. Plusieurs applications en sont données : une combinaison d'une onde sinusoïdale avec une onde de type cosinus de même fréquence est une onde sinusoïdale ; la détermination d'expressions exactes pour les sinus et cosinus de beaucoup d'angles en termes de racines carrées des nombres entiers est expliquée.

Histoire de *p* définit *p* comme le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre et montre que *p* apparaît dans une variété de formules de probabilités. Après discussion des débuts de l'histoire de *p*, le programme reprend les travaux d'Archimède avec des animations informatiques et détaille la course dans l'histoire à la détermination des décimales de *p* et à l'élucidation de la nature de ce nombre. Les améliorations principales des évaluations de *p* représentent des jalons d'avancées importantes dans l'histoire des mathématiques.

Histoire des mathématiques décrit quelques développements des débuts de l'histoire des mathématiques, depuis les calendriers babyloniens sur tablettes d'argile il y a 5000 ans, aux événements qui furent des jalons vers le développement du calcul infinitésimal au dix-septième siècle. Il décrit des symboles numériques dans différentes cultures et la façon dont la numérologie a donné naissance à la théorie des nombres. Il s'intéresse au théorème de Pythagore, présente les recherches développées pour estimer le nombre *p* et explique comment l'astronomie a conduit à la trigonométrie. Il souligne des avancées majeures des mathématiques telles que la création de l'algèbre et de la géométrie analytique qui ont accéléré le développement du calcul différentiel et intégral.

Polynômes fournit un catalogue visuel des formes de graphes de polynômes dans un même système de coordonnées rectangulaires. Il s'ouvre avec des exemples des courbes polynomiales qui apparaissent dans la vie réelle. Suit une description systématique des graphes de polynômes en fonction de leur degré. Beaucoup de courbes qui ne sont pas des graphes des polynômes peuvent être approchées avec une grande exactitude par les graphes de polynômes. Une séquence avec une intéressante animation informatique montre les approximations polynomiales d'une courbe sinusoïdale.

Gérard Kuntz[11]

[11] Cet article a été élaboré à partir de ma connaissance personnelle des vidéos de Tom Apostol et d'un texte de présentation de ces vidéos destiné au colloque EMF 2003 de Tozeur (décembre 2003). Je m'en suis largement inspiré (j'en partage la philosophie). Il a été écrit par l'équipe qui a adapté ces vidéos en français et qui réfléchit à leur intégration dans l'apprentissage des mathématiques (Eliane Cousquer, Pierre André Caron, Christian Cousquer). Un débat par courriel entre Eliane Cousquer et Jean-Pierre Friedelmeyer a clarifié certaines formulations du texte initial.