SOLUTION GENERALE DE L'EQUATION DU 4ème DEGRE
DANS LE CORPS DES COMPLEXES

Le présent article propose une méthode de résolution de l'équation du quatrième degré quand les coefficients sont complexes, basée sur la transformation symétrique.

METHODE DE RESOLUTION

La méthode de résolution consiste à utiliser la transformation régulière des composantes symétriques de dimension 4 suivante : aux quatre grandeurs complexes $x_1,\ x_2,\ x_3, x_4$ on fait correspondre les trois autres $y_1,\ y_2,\ y_3, y_4$ de l'espace complexe dit symétrique telles que :

$$\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^4 & a^2 \\ 1 & a^3 & a^2 & a \end{bmatrix} \times \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \quad et \ \ inversement \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^3 & a^2 & a \\ 1 & a^2 & a^4 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

où $a = e^{j\frac{\pi}{2}} = j$.

FORMALISME

On écrit l'équation du quatrième degré sous la forme suivante :

$$\left(x + x_1\right)\left(x + x_2\right)\left(x + x_3\right)\left(x + x_4\right) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

où :

$a = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_2x_4$

$c = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2$

$d = x_1x_2x_3x_4$

et dont les racines sont $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4$.

RESOLUTION

Dans l'espace symétrique des « *y* », transformé de l'espace des « *x* », on calcule à l'aide des formules de la transformation décrite ci avant, les coefficients *a, b, c, d* :

$y_1 = a$

$3y_1^2 - y_3^2 - 2y_2y_4 = 8b$

$y_1^3 - y_1y_3^2 + y_3y_2^2 + y_3y_4^2 - 2y_1y_2y_4 = 16c$

$y_1^4 - y_2^4 + y_3^4 - y_4^4 - 2y_1^2y_3^2 + 2y_2^2y_4^2 - 4y_4y_1^2y_2 + 4y_1y_2^2y_3 - 4y_2y_3^2y_4 + 4y_3y_4^2y_1 = 16^2 d$

L'expression des $y_1,\ y_2,\ y_3, y_4$ (transformés respectivement des $x_1,\ x_2,\ x_3, x_4$) s'obtient, en fonction des coefficients *a, b, c, d* en résolvant le système précédent. La première équation étant explicite, on remplace y_1 par sa valeur dans les équations qui suivent. Il vient :

$y_1 = a$

(1) $\quad y_3^2 + 2y_2y_4 = 3a^2 - 8b$

(2) $\quad y_3\left(y_2^2 + y_4^2\right) = 2(a^3 - 4ab + 8c)$

et dans l'hypothèse ou y_3 n'est pas nul en tenant compte des équations précédentes,

$$y_3^6-\left(3a^2-8b\right)y_3^4+\left(3a^4-16a^2b+16ac-64d+16b^2\right)y_3^2-\left(a^3-4ab+8c\right)^2=0$$

En posant $Y=y_3^2$, cette dernière équation forme une équation du troisième degré en Y que l'on résout. Soit kk l'une des valeurs de Y et k l'une des « puissance moitié » correspondantes donnant une valeur de y_3. Les équations (1) et (2) permettent d'écrire : $y_2y_4=\frac{1}{2}\left(3a^2-8b-kk\right)$ ou encore en l'élevant au carré :

(1a) $\quad y_2^2y_4^2=\frac{1}{4}\left(3a^2-8b-kk\right)^2$

(2a) $\quad y_2^2+y_4^2=\frac{2}{k}\left(a^3-4ab+8c\right)$

Le produit et la somme de y_2^2 et y_4^2 admettent pour solution les racines de l'équation du deuxième degré en $ë$: $l^2-\left(y_2^2+y_4^2\right)l+y_2^2y_4^2=0$. Soit $l\,l$ l'une des solutions que l'on affecte à y_2^2 et l l'une des « puissance moitié » correspondantes ; il vient : $y_4=\frac{1}{2l}\left(3a^2-8b-kk\right)$.

On dispose donc des valeurs de y suivantes :

$$y_1=a$$
$$y_2=l$$
$$y_3=k$$
$$y_4=\frac{1}{2l}\left(3a^2-8b-kk\right)$$

On déduit les valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4 à l'aide de la transformation inverse. Les valeurs des racines sont, compte tenu du formalisme adopté, $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$, $-x_4$.

Il est intéressant de noter qu'il y a 3 racines de l'équation du troisième degré en Y ($Y=y_3^2$), soit 6 valeurs de y_3 correspondantes, et que le système d'équation relatif à y_2 *et* y_4 conduit à 4 couples de valeurs pour chaque valeur de y_3. Il y a donc 24 vecteurs $\{y\}$ donnant 24 vecteurs $\{x\}$ solution de l'équation. Ces 24 vecteurs donnent bien les 4 mêmes valeurs solution de l'équation mais dans un ordre différent (24 = 4!).