

Nombres parfaits

Pythagore définissait un nombre parfait comme étant un entier naturel égal à la somme S de tous ses diviseurs, autres que lui-même.

Le mathématicien grec Nicomaque, dès l'antiquité, avait trouvé les 4 premiers entiers parfaits : 6, 28, 496 et 8 128.

Dix-sept siècles plus tard le 5^{ème} nombre parfait, 33 550 336, fut découvert.

Un nombre de Mersenne est de la forme $2^n - 1$.

Démontrons que si $2^n - 1$ est premier alors l'entier $p = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ est parfait.

Posons $2^n - 1 = q$, dans ce cas $p = 2^{n-1} \cdot q$.

L'ensemble des diviseurs de p , autres que p est $E = \{1; 2; 2^2; \dots; 2^{n-1}; q; 2q; 2^2q; \dots; 2^{n-2}q\}$.

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + q + 2q + 2^2q + \dots + 2^{n-2}q .$$

$$S = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1})q - 2^{n-1}q.$$

$$S = (1 + q) (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) - 2^{n-1}q.$$

Or, $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ puisqu'il s'agit des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

$$D'où $S = (1 + q)(2^n - 1) - 2^{n-1}q = 2^n - 1 + q(2^n - 1 - 2^{n-1})$.$$

$$S = q + q(2^{n-1} - 1) = p.$$

Réciproquement, Euler a montré que chaque nombre parfait pair est de la forme $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$, avec $2^n - 1$ premier.

Le plus grand nombre premier connu, $2^{6\,972\,593} - 1$, donne donc le trente-huitième nombre parfait pair, $2^{6\,972\,592} (2^{6\,972\,593} - 1)$.

Le 39^{ème} nombre parfait pourrait être impair. L'existence ou non de nombres parfaits impairs est l'une des plus vieilles questions non résolues en mathématiques.

On ne sait pas encore si l'ensemble des nombres parfaits est fini ou infini.

1) Prouvons que 6 est parfait.

Les diviseurs de 6, à part 6, sont 1, 2 et 3 et on vérifie facilement que

$$1 + 2 + 3 = 6. \text{ On vérifie que } 6 = 2^1 \cdot (2^2 - 1).$$

2) Passons à 28.

Utilisation de la HP 40G pour la recherche de décomposition en facteurs premiers.

Procédure calculatrice	Affichage à l'écran
CAS ALGB ▽ ▽ ▽ OK	FACTOR()
▽ 28 ENTER	$2^2 \cdot 7$

$28 = 2^2 \cdot (2^3 - 1)$, donc 28 est bien parfait.

Vérifions que la somme de ses diviseurs autres que lui-même est égale à 28.

Utilisation de la HP 40G pour la recherche de diviseurs.

Procédure calculatrice	Affichage à l'écran
CAS MATH ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▷ OK	DIVIS()
▽ 28 ENTER	28 OR 14 OR 7 OR 4 OR 2 OR 1

Les diviseurs de 28 sont donc 1, 2, 4, 7 et 14.

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

3) Au tour de 496.

Utilisation de la HP 40G pour la recherche de décomposition en facteurs premiers.

Procédure calculatrice	Affichage à l'écran
CAS ALGB ▽ ▽ ▽ OK	FACTOR()
▽ 496 ENTER	$2^4 \cdot 31$

$496 = 2^4 \cdot (2^5 - 1)$, donc 496 est bien parfait.

Vérifions que la somme de ses diviseurs autres que lui-même est égale à 496.

Utilisation de la HP 40G pour la recherche de diviseurs.

Procédure calculatrice	Affichage à l'écran
CAS MATH ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▷ OK	DIVIS()
▽ 496 ENTER	496 OR 248 OR 124 OR 62 OR 31 OR 16 OR 8 OR 4 OR 2 OR 1

Les diviseurs de 28 sont donc 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, et 248.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496.$$

3) Enfin, 8 128.

Utilisation de la HP 40G pour la recherche de décomposition en facteurs premiers.

Procédure calculatrice	Affichage à l'écran
CAS ALGB ▽ ▽ ▽ OK	FACTOR()
▽ 8 128 ENTER	$2^6 \cdot 127$

$8\ 128 = 2^6 \cdot (2^7 - 1)$, donc 496 est bien parfait.

Vérifions que la somme de ses diviseurs autres que lui-même est égale à 8 128.

Utilisation de la HP 40G pour la recherche de diviseurs.

Procédure calculatrice	Affichage à l'écran
CAS MATH ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ OK	DIVIS()
▽ 8 128 ENTER	496 OR 248 OR 124 OR 62 OR 31 OR 16 OR 8 OR 4 OR 2 OR 1

Les diviseurs de 8 128 sont donc 4 064, 2 032, 1 016, 508, 254, 127, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.

$$S = 4\ 064 + 2\ 032 + 1\ 016 + 508 + 254 + 127 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4, \\ + 2 + 1 = 8\ 128.$$