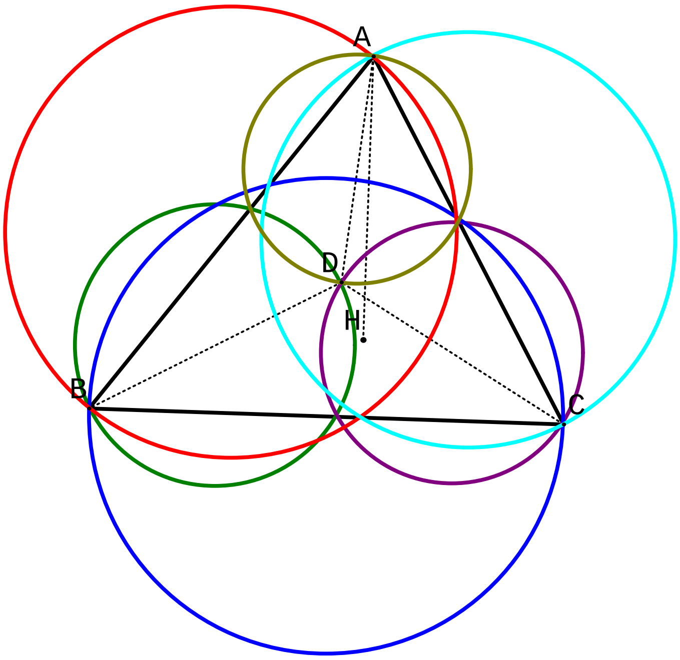
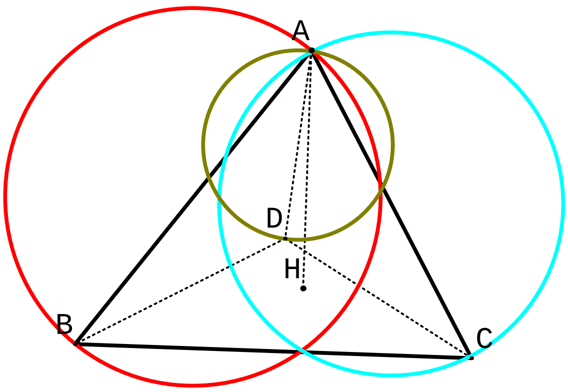
6 Sphères et un tétraèdre, problème proposé par les Pays-Bas aux OIM de 1985.

Démontrer que le solide S, intersection d'un tétraèdre régulier T, d'arête égale à 1, avec les 6 sphères de diamètre chaque arête du tétraèdre, contient deux points distants de $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Solution.



Je désigne par S_{BD} la sphère de diamètre [BD], par H le projeté orthogonal de A sur la face (BDC). Puisque (AH) ⊥ (BDC), (AH) ⊥ (BH, (AH) ⊥ (CH), (AH) ⊥ (DH). H appartient donc aux sphères S_{AB}, S_{AD} et S_{AC}.



Calculons la longueur AH.
Le triangle AHB est rectangle en H, on peut donc y appliquer le théorème de Pythagore et nous obtenons :
$AB^2 = AH^2 + BH^2$.
H est l'orthocentre et le centre de gravité du triangle équilatéral BCD.
$BH = \frac{2}{3}h$ avec $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ puisque la hauteur dans un triangle équilatéral est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ fois le côté du triangle.

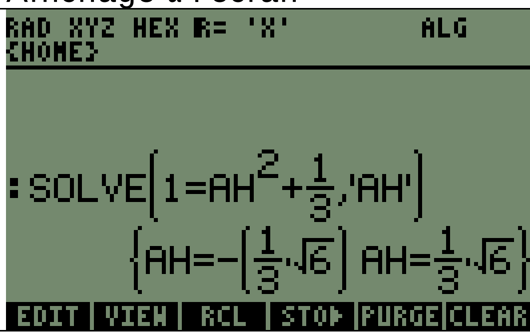
$1 = AH^2 + (\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2})^2$.

$1 = AH^2 + \frac{1}{3}$

$AH^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $AH = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

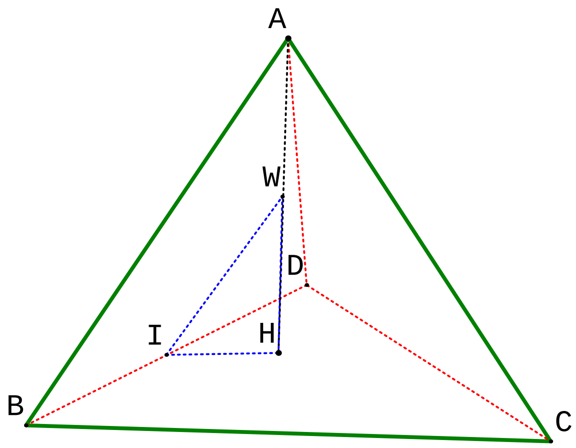
$\frac{AH}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Vérification avec la HP 49G+.

Procédure calculatrice	Affichage à l'écran
S.SLV SOLVE $(1 = AH^2 + \frac{1}{3}$, AH) ENTER Le menu S.SLV s'obtient en appuyant sur la flèche ↰ puis sur la touche 7.	

La valeur $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ trouvée pas la calculatrice n'est pas prise en compte puisqu'une distance est toujours positive.
Par conséquent, le milieu W de [AH] est tel que $AW = \frac{1}{\sqrt{6}}$ et se présente comme un candidat sérieux.

W appartient déjà aux 3 sphères S_{AB}, S_{AD} et S_{AC}.
Il suffit de montrer qu'il appartient également aux 3 autres : S_{BD}, S_{CD} et S_{BC}. Le raisonnement étant analogue, montrons simplement que W appartient à la sphère S_{BA}.



Soit I le milieu de [BD], IWH est rectangle en H, on peut donc y appliquer le théorème de Pythagore et on obtient :

$$W^2H + HI^2 = WI^2 = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Vérification avec la HP 49G+.

Procédure calculatrice	Affichage à l'écran
$WI^2 = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ENTER	

$WI^2 = \frac{1}{4} = R^2$, R correspondant au rayon des sphères.

W appartient donc aux 6 sphères et au tétraèdre ABCD et les deux points A et W sont les deux points solutions du problème.