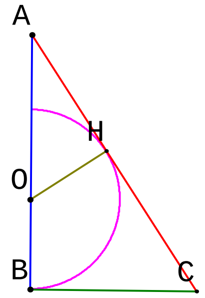
# Minimisation du volume d'un cône tirée d'une épreuve de Bac.

ABC est rectangle en B, la droite (AC) est tangente en H au demi-cercle de centre O et de rayon OB = 1 et (BC) est tangente en B au même demi-cercle.
En pivotant autour de (AB), le triangle ABC ci-dessus engendre un cône de révolution de sommet A.

Pour quelle valeur de x = BC >1, le volume du cône est-il minimal ?




Solution.

On pose h = AB.

$\frac{OH}{AH} = \frac{BC}{AB}$ puisque dans le triangle AHO, rectangle en H,

tan($\widehat{OAH}$) = $\frac{OH}{AH}$ et dans le triangle ABC, rectangle en B,

tan($\widehat{OAH}$) = $\frac{BC}{AB}$.

Par suite, $\frac{1}{AH} = \frac{x}{h}$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en B, on obtient :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$, or AC = AH + HC= $\frac{h}{x}$ + x, AB = h et BC = x, d'où :

$\frac{h^2}{x^2} + 2h + x^2 = h^2 + x^2$ soit $x^2 = \frac{h}{h-2}$ et après avoir appliquer le produit en croix :

$h = \frac{2x^2}{x^2-1}$

Soit V(x) le volume du cône de révolution engendré par le triangle ABC.

V(x) = $\dfrac{p\,x^2 \times h}{3} = \dfrac{p\,x^2 \times \dfrac{2x^2}{x^2-1}}{3} = \dfrac{2p\,x^4}{3(x^2-1)}$ .

Nous allons étudier la fonction f définie par f(x) = $\dfrac{x^4}{x^2-1}$ de telle sorte que V(x) = $\dfrac{2p}{3}$ f(x), ainsi, si le minimum de f est m celui de V sera $\dfrac{2p}{3}$ m.

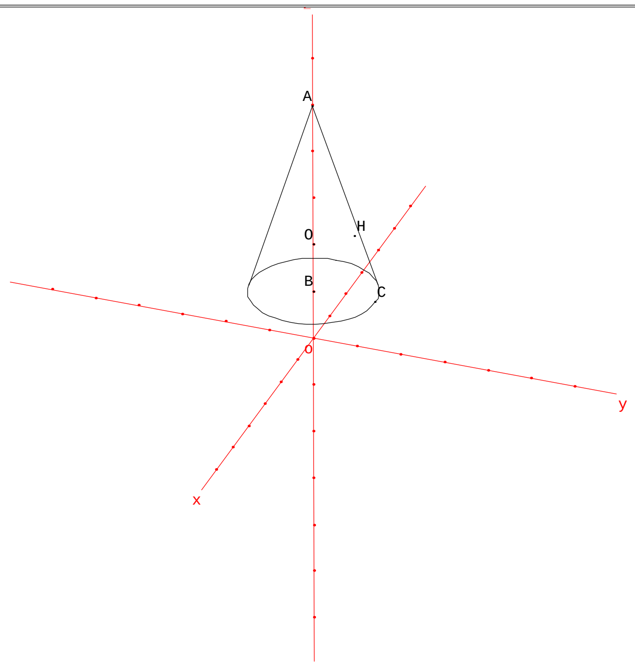
| Procédure HP 40G | Affichage à l'écran |
|---|---|
| CAS DIFF Δ Δ Δ Δ OK | TABVAR( , ) |
| X⁴Δ Δ ÷ X² - 1 ENTER | F =: $\dfrac{X^4}{X^2-1}$ |
| OK | F' = $\dfrac{\left(X^3-1\right).4X^3 - X^4.2X}{\left(X^2-1\right)^2}$ <br> $\rightarrow$ : $\dfrac{X^3.\left(X+\sqrt{2}\right).\left(X-\sqrt{2}\right).2}{\left(X+1\right)^2.\left(X-1\right)^2}$ |
| OK <br> Je n'ai sélectionné du tableau de variation que la partie correspondant à x > 1. | Variation table : <br> $\begin{array}{cccccc} 1 & - & \sqrt{2} & + & +\infty & X \\ \infty & \downarrow & 4 & \uparrow & +\infty & F \end{array}$ |

Ainsi TABVAR nous permet d'obtenir non seulement la dérivée de f (d'abord pas à pas puis factorisée) mais aussi le tableau de variation de f. A noter que TABVAR ne donne le tableau de variation que de fonctions dont la dérivée est rationnelle.

Si x = $\sqrt{2}$ , le minimum de f est m = 4 donc le volume V est minimum pour x = $\sqrt{2}$ et prend alors la valeur $\dfrac{2p}{3}$.4 = $\dfrac{8p}{3}$

Avec GeospacW:

v:8.377758




En pilotant au clavier j'arrive à v = 8,377758 *(* comme valeur approchée de l valeur minimale de V.

Or, avec la calculatrice nous obtenons : $\frac{8p}{3} \approx 8.3775804957$ ; la valeur approchée obtenue avec GeospacW est donc précise avec 5 chiffres après la virgule.